ZURRIA
ANALISI
N. 24 T. 1

ESERCIZII

DI

ANALISI SUBLIME.

MEMORIA TERZA

DI

GIUSEPPE ZURRIA

ESTRATTA

DAL VOLUME XVII DEGLI ATTI DELL' ACCADEMIA GIOENIA

CATANIA

1840

PER PIETRO GIUNTINI

SULLO SVILUPPO IN SERIE

DELLE POTENZE DEL RADICALE

ESPRIMENTE

LA DISTANZA MUTUA DI DUE PIANETI.

Da che il gran problema delle perturbazioni planetarie incominciò per la sua importanza a fissare l' attenzione dei geometri lo sviluppo della funzione esprimente la distanza mutua di due pianeti divenne un' argomento non meno interessante. Questo sviluppo, che mi propongo effettuare in serie ordinata secondo i coseni dei multipli dell' angolo formato al centro del sole dai raggi vettori de' due pianeti è stato fra i tanti che se ne sono occupati, con un metodo molto elegante dal signor Laplace trattato nel 5° volume della *Meccanica Celeste*. Quest' illustre geometra richiama dal secondo libro della sua grand' opera l'equazione a differenze di secondo ordine che esprime il rapporto tra i coefficienti de' termini formanti lo sviluppo ; ne tratta la soluzione con un processo di analisi molto ingegnoso dipendente dal calcolo integrale ordinario;

e determinando le due costanti arbitrarie, contenute nel suo integrale, il risultato ne assegna per mezzo d' una espressione che dipende dall'integrale definito d' una trascendente. Or io trattando l' accennato sviluppo quantunque terró un metodo tutto diverso di quello dell' autore della *Meccanica Celeste*, ciò nondimeno perverrò ad un risultato, che è pure espresso per integrali definiti, e che contiene come un caso particolare quello che si trova nell' opera citata registrato. In quest' occasione ho rilevato il valore d' una di quelle due costanti determinate dal sig. Laplace essere quattro volte minore di quello che dee risultarne. Facendomi dapprima ad indagare donde ciò viene, e poi eseguendo la determinazione della stessa costante con un metodo più semplice e più diretto di quello che si è adoperato, darommi ad intraprendere la valutazione dell'integrale che da quel grande geometra non é stata effettuata; perverrò ad alcune relazioni degne di rimarco tra i primi due coefficienti dei termini dello sviluppo; e per avere il valore di questi coefficienti, dalla conoscenza dei quali quella di tutti gli altri si deduce, assegnerò in fine due serie tanto convergenti che molta abbreviazione apporteranno e al calcolo delle perturbazioni, e a quello delle trascendenti ellittiche, cui l' assunto sviluppo trovasi oggi intimamente legato.

Se denotiamo con r ed r' i raggi vettori di due pianeti, con θ l' angolo formato da questi raggi al centro del sole, e con D la distanza mutua de' due pianeti, otterremo

$$D = \sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2}$$

per la rappresentanza analitica della funzione che dovremo sviluppare in serie ordinata secondo i coseni dell'angolo θ e suoi multipli. Considerando cotesto valore di D come funzione de' raggi vettori r ed r', e richiamandoci dalla teoria del movimento ellittico che siffatti raggi differiscono poco dalle distanze medie a ed a' de' due pianeti, rappresentiamo la precedente formola coll'espressione

$$D = \varphi\,(a+h,\ a'+h')$$

nella qoale con h abbiamo significato la differenza tra r ed a, e con h' quella tra r' ed a'. Se sviluppiamo questo valore di D secondo le potenze e i prodotti delle h; e a tal' uopo ci gioviamo del teorema di Taylor, avremo

$$D = \varphi(a, a') + h\left(\frac{d\varphi}{da}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ h'\left(\frac{d\varphi}{da'}\right) + hh'.\left(\frac{d^2\varphi}{da\,da'}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h'^2}{2}.\left(\frac{d^2\varphi}{da'^2}\right) + \ldots\ldots$$

I valori dei coefficienti differenziali che sono compresi in questa formola dipendono dalle potenze decrescenti del radicale

$$\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2}$$

Tali potenze possono rappresentarsi in generale colla funzione

$$(a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{-m}$$

o pure supposto $a > a'$, e fatto

$$\frac{a'}{a} = \alpha \,, \quad (1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-m} = f(\theta)$$

colla

$$a^{-2m} f(\theta).$$

Per maggiore generalità dell' argomento ci daremo a sviluppare quest' ultima funzione, ponendo a tale effetto l' equazione

$$f(\theta) = \tfrac{1}{2}\psi(m,o) + \psi(m,1)\cos\theta + \ldots \psi(m,i)\cos i\theta + \ldots$$

nella quale i coefficienti $\psi(m, i)$ sono indeterminati, e indipendenti da θ. Per avere il loro valore espresso in quantità conosciute moltiplichiamo successivamente questa equazione per $d\theta$, $d\theta\cos\theta$, $d\theta\cos 2\theta$, ec. ec. $d\theta\cos i\theta$, e quindi integrando tra i limiti dei valori di θ compresi tra o, e la semicirconferenza π del raggio 1, tutti i termini del secondo membro, eccettuato successivamente il primo, il secondo, il terzo ecc. ecc. spariscono, e si ottengono l'espressioni

$$\int_o^\pi f(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}\psi(m, o)$$

$$\int_o^\pi f(\theta)\, d\theta \cos.\theta = \frac{\pi}{2}\psi(m, 1)$$

$$\int_o^\pi f(\theta)\, d\theta \cos.2\theta = \frac{\pi}{2}\psi(m, 2)$$

. . . .

$$\int_o^\pi f(\theta)\, d\theta \cos i\theta = \frac{\pi}{2}\psi(m, i)$$

dalle quali si traggono i valori de' coefficienti.

$\psi(m,i)$: valori che ripetendo i da $i=o$ ad $i=\infty$ possono tutti rappresentarsi colla formola generale

$$\psi(m,i)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\,d\theta\cos i\theta$$

o pure, mettendo il valore di $f(\theta)$, colla

$$\psi(m,i)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta\cos i\theta}{(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^m}.$$

Il metodo che veniamo d'usare onde avere il valore d'un coefficiente qualunque per integrali definiti, che abbiamo sottoposto alla segnatura del sig. Fourier, fu prodotto secondo Lalande dal famoso Clairaut nelle memorie dell'accademia di Parigi per l'anno 1754 quando pose a calcolo le ineguaità del pianeta che abitiamo. Questo metodo che dal Poisson viene attribuito al d'Alembert e che dallo stesso signor Lalande si trova esposto in un modo più semplice non solo nelle citate memorie per gli anni 1760, e 1761 all'occasione di stimare le ineguaità di Venere e di Marte, ma pure nel terzo volume della seconda edizione della sua *Astronomia* (pag. 590 e seg.) è quello stesso di cui molto tempo dopo giovossi il prefato sig. Fourier per ottenere lo sviluppo d'una funzione qualunque in serie di seni e coseni d'archi multipli. Questo illustre geometra seppe però così bene e con tanta eleganza maneggiarlo e farne uso che mercè le sue importanti ricerche oltre che tale metodo forma il più bello ornamento della sua celebre opera sulla *Teoria del calore* occupa anche oggi un posto sì marcato ed importante nell'analisi dell'equazioni alle differenziali parziali.

Per venire intanto alla valutazione dell' integrale, da cui dipende il valore di $\psi(m, i)$, e che forma il principale punto dell' argomento poniamo.

$$2 \cos \theta = x + x^{-1}$$

ed otterremo

$$2 \cos 2\theta = x^2 + x^{-2}$$

$$2 \cos 3\theta = x^3 + x^{-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e perciò in generale

$$2 \cos i\theta = x^i + x^{-i}$$

Dalla prima equazione ricavandosi

$$x = \cos \theta \pm \sqrt{-1}.\ \text{sen.}\ \theta$$

si troverà, attenendoci al segno superiore,

$$d\theta = -\frac{dx}{x}\sqrt{-1}$$

Sostituendo i valori di $d\theta$, $2\cos\theta$, $2\cos i\theta$ nella formola esprimente il valore di $\psi(m, i)$, e considerando che ai limiti o, e π di θ corrispondono i limiti 1, e -1 di x, s' avrà

$$\psi(m,i) = -\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\int_{+1}^{-1}\frac{(x^i + x^{-i})\,dx}{x(1-\alpha(x+x^{-1})+\alpha^2)^m};$$

ma essendo

$$1-\alpha(x+x^{-1})+\alpha^2 = -1.\frac{(\alpha-x)(1-\alpha x)}{x}$$

ed avendosi in generale

$$\int_{+a}^{-b} \varphi x \, dx = - \int_{-b}^{+a} \varphi x \, dx$$

s' avrà dunque

$$\psi(m,i) = \frac{(-1)^{-m} \sqrt{-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x^{m-1} dx \, (x^{i} + x^{-i})}{[(\alpha - x)(1 - \alpha x)]^{m}}$$

Se nel secondo termine di quest' ultima formola si pone $x = \frac{1}{y}$ si ricava la relazione

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{m-i-1} \, dx}{[(\alpha - x)(1 - \alpha x)]^{m}} = (-1)^{-2m+1} \int_{-1}^{+1} \frac{y^{m+i-1} dy}{[(\alpha - y)(1 - \alpha y)]^{m}}$$

la quale, per essere indifferente al risultato mettere x in vece di y, si trasforma in quest' altra

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{m-i-1} dx}{[(\alpha - x)(1 - \alpha x)]^{m}} = (-1)^{-2m+1} \int_{-1}^{+1} \frac{x^{m+i-1} \, dx}{[(\alpha - x)(1 - \alpha x)]^{m}}$$

Sostituendo nel valore di $\psi(m, i)$ quest' ultima espressione, e richiamando essere

$$(-1)^{-m} = \cos. m\pi - \sqrt{-1} . \operatorname{sen.} m\pi$$

$$(-1)^{-m+1} = -(\cos. 2m\pi - \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen.} 2m\pi)$$

otterrassi, fatte le riduzioni,

$$\psi(m,i) = -\frac{2 e^{-2m\pi\sqrt{-1}} . \operatorname{sen.} m\pi}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x^{m+i-1} dx}{[(\alpha - x)(1 - \alpha x)]^{m}} .$$

Nel caso, di cui ci occupiamo, essendo $\alpha < 1$, ed $m = \frac{2n-1}{2}$, stimando n numero intero, è chiaro

che risultando

$$e^{-2m\pi\sqrt{-1}} \; sen\, m\pi = cos\, n\pi,$$

la precedente formola ci somministrerà risultati immaginarii allorquando i limiti de' valori di x si prenderanno $< o$, e $> \alpha$. Per avere adunque risultati reali, come debb' essere, bisogna che siffatti limiti fossero solamente ristretti l'uno ad $x=o$, e l'altro ad $x=\alpha$. Ciò posto, sarà

$$\psi(m,i) = -\frac{2\, cos.\, n\pi}{\pi} \int_{o}^{\alpha} \frac{x^{m+i-1}dx}{[(\alpha-x)(1-\alpha x)]^m}$$

o che è la stessa cosa

$$(1)\ldots\; \psi(m,i) = \frac{2\alpha^i\, sen\, m\pi}{\pi} \int_{o}^{1} \frac{x^{m+i-1}dx}{[(1-x)(1-\alpha^2 x)]^m}$$

Questa formola ci dá i valori de' coefficienti de' termini che compongono lo sviluppo delle potenze del radicale esprimente la distanza mutua di due pianeti. Se in essa si fa $m=\frac{1}{2}$ si ottiene la formola

$$(1)\ldots\; \psi(\tfrac{1}{2},i) = \frac{2\alpha^i}{\pi} \int_{o}^{1} \frac{x^{i-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(1-x)(1-\alpha^2 x)}}$$

dalla quale posto $x=1-t^2$, si deduce il risultato

$$(3)\ldots\; \psi(\tfrac{1}{2},i) = \frac{4\alpha^i}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{o}^{1} \frac{(1-t^2)^{i-\frac{1}{2}}dt}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\cdot t^2}}$$

che in fondo è lo stesso di quello che si trova dal signor Laplace assegnato alla pag. 339 del 5° vol. della *Meccanica Celeste*. Difatti questo grande geo-

metra significando con $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ ciò che noi abbiamo disegnato con $\psi(\frac{1}{2}, i)$, rinviene da principio (pagina 327) una formola dipendente da integrali definiti, la quale essendo scritta secondo la segnatura del sig. Fourier viene rappresentata da

$$(4)\ldots\ b_{\frac{1}{2}}^{(i)} = 2H \cdot \alpha^{i} \cdot \int_{0}^{1} \frac{dt(1-t^{2})^{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\alpha^{2}+\alpha^{2}t^{2}}}$$

Per determinare la quantità H che funziona da costante arbitraria fa uso del valore di $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, che è quello che dee assegnarsi, tirandolo dallo sviluppo della funzione

$$(5)\ldots\ (1-\alpha e^{\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}\ (1-\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}$$

rappresentante il valore del radicale

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta-\alpha^{2}}}$$

espresso in esponenziali immaginarie; e con un metodo molto ingegnoso ottiene (pag. 339.)

$$H = \frac{1}{2\pi}.$$

Questo valore di H sostituito nella formola (4) ci dà un risultato ch' è quattro volte minore di quello che abbiamo ottenuto.

Esaminando donde viene tale differenza c' è facile rilevare che quel sommo geometra invece di prendere il valore di $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, da lui dedotto dallo

sviluppo della (5), sotto la forma

$$\frac{1}{2}\, b_{\frac{1}{2}}^{(i)} = \frac{1.2.5 \ldots (2i-1)}{2.4.6 \ldots\ldots 2i}\, \alpha^{i}. \left[1 + \frac{2i+1}{2i+2} \cdot \frac{1}{2} \alpha^{2} + \ldots \right]$$

lo prese sotto la

$$2\, b_{\frac{1}{2}}^{(i)} = \frac{1.3.5 \ldots (2i-1)}{2.4.6. \ldots 2i} \cdot \alpha^{i} \left[1 + \frac{2i+1}{2i+2} \cdot \frac{1}{2} \alpha^{2} + \ldots \right]$$

che lo dà quattro volte minore. S'e perciò che egli ottenne

$$H = \frac{1}{2\pi} \text{ invece di } H = \frac{2}{\pi}$$

Sostituendo dunque nella formola del sig. Laplace quest'ultimo valore di H si rinviene il risultato

$$b_{\frac{1}{2}}^{(i)} = \frac{4\,\alpha^{i}}{\pi . \sqrt{1-\alpha^{2}}} \int_{0}^{1} \frac{dt\,(1-t^{2})^{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^{2}}{1-\alpha^{2}} \cdot t^{2}}}$$

che è lo stesso di quello che abbiamo sopra ottenuto, e che c' indica, come il sig. Plana ha pure rimarcato, doversi il secondo membro dell'equazione scritta alla pag. 339 lin. 12 del citato volume della *Meccanica Celeste* moltiplicarsi per 4; ed oltre a ciò sopprimersi nel radicale formante il suo denominatore il fattore $1-t^{2}$

Non cade qui fuori proposito osservare che per determinare la costante invece di adoperare il coefficiente generale $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ si può far' uso, come in simili casi dee praticarsi, del primo coefficiente $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, che porta ad un calcolo più semplice e diretto.

Difatti nella (4) facendo $i = 0$, e ponendo $t^2 = 1 - x$ si trova

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = H \int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(1-x)(1-\alpha^2 x)}}$$

ma dallo sviluppo della (5) ottenendosi

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2 \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \alpha^2 + \ldots . \right]$$

ed essendo

$$\int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(1-x)(1-\alpha^2 x)}} = \pi \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \alpha^2 + (\tfrac{1.2.}{3.4.})^2 \alpha^4 + \ldots \right]$$

sarà perció

$$\pi H. \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \alpha^2 + (\tfrac{1.3}{2.4})^2 \alpha^4 + \ldots \right] =$$

$$2. \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \alpha^2 + (\tfrac{1.3}{2.4})^2 \alpha^4 + \ldots \right]$$

e quindi

$$H = \frac{2}{\pi}.$$

Il metodo che noi abbiamo tenuto nel trattare l' assunto argomento è indipendente dalla conoscenza del valore d' un coefficiente qualunque $b^{(i)}_{\frac{1}{2}}$, Ciò dee riputarsi per cosa molto interessante poichè se sviluppiamo secondo le potenze di α il fattore

$$(1 - \alpha^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

della formola (2), che nel caso di cui si tratta riuscendo sempre $\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} > \alpha^2$, e qualche volta $\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} > 1$

porta a risultati più semplici e più vantaggiosi di quelli della (3); e quindi ci facciamo a valutare tra i designati limiti gl' integrali dei termini dello sviluppo, moltiplicato ciascuno per l' altro fattore

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

troveremo perfettamente quello stesso valore di $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, di cui servissi l' autore della *Meccanica Celeste* per determinare la H. Questo illustre geometra tralasciando d' interloquire sull' integrazione della sua formola si fa solamente a soggiungere conchiudendo il suo scritto, ch' essendo sempre α minore dell'unità i valori di $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ divengono di più in più piccoli; e così la serie dello sviluppo di

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

risultare molto convergente. Pertanto onde venire al concreto e fissare maggiormente le idee ci faremo ad integrare la formola (1) che contiene come un caso particolare la (2).

Sviluppando secondo le potenze di α il binomio

$$(1-\alpha^2 x)^{-m}$$

e sottoponendo i coefficienti de' termini, formanti lo sviluppo, al gamma legendriano, si ottiene facilmente l' espressione

$$(1-\alpha^2 x)^{-m} = \underset{n=0}{\overset{n=\infty}{S}} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n+1)} . \alpha^{2n} x^n$$

che sostituita nella (1) ci dà

$$\psi(m,i) = \frac{2\alpha^i \, sen.m\pi}{\pi} \underset{n=0}{\overset{n=\infty}{S}} \frac{\alpha^{2n}\,\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{m+n+i-1}\,dx}{(1-x)^m}$$

Richiamando dal tomo 3°, parte prima, delle *Lezioni di Matematica Sublime* del Prof. San-Martino la formola.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} dx\,(1-x)^{a-1} = \frac{\Gamma(a).\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(a+\alpha)}$$

e facendovi

$$\alpha = m+n+i\,,\ a = 1-m$$

dedurrassi

$$\int_0^1 \frac{x^{m+n+i-1}\,dx}{(1-x)^m} = \frac{\Gamma(1-m)\,\Gamma(m+n+i)}{\Gamma(n+i+1)}$$

ma dalle stesse *Lezioni* (tom. cit.) si ha

$$\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\Gamma(m).\mathrm{sen}\, m\pi}$$

dunque

$$\int_0^1 \frac{x^{m+n+i-1}\,dx}{(1-x)^m} = \frac{\pi\,\Gamma(m+n+i)}{\Gamma(m).\,\Gamma(n+i+1).\,\mathrm{sen}\, m\pi}$$

e quindi

$$\psi(m,i) = 2\alpha^i \mathop{S}_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\,\Gamma(n+1)}.\frac{\Gamma(m+n+i)}{\Gamma(m).\Gamma(i+n+1)}\alpha^{2n}$$

ovvero

$$\psi(m,i) = 2\alpha^i\left[\frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m).\,\Gamma(i+1)} + \mathop{S}_{n=1}^{n=\infty}\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n+1)}.\frac{\Gamma(m+n+i)}{\Gamma(m)\,\Gamma(i+n+1)}\alpha^{2n}\right]$$

Sostituendo in questa formola il valore di

$$\frac{\Gamma(m+n+i)}{\Gamma(m).\,\Gamma(i+n+1)} = \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m).\,\Gamma(i+1)}\cdot\frac{(m+i)\ldots(m+i+n-1)}{(i+1).\,\ldots\,.(i+n)}$$

si ricava

$$(6) \ldots \psi(m,i) = \frac{2\,\Gamma(m+i)}{\Gamma(m).\,\Gamma(i+1)}\,\alpha^i \left[1 + \mathop{S}_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\,\Gamma(n+1)} . \frac{(m+i)\ldots(m+i+n-1)}{(i+1)\ldots\ldots(i+n)}\,\alpha^{2n} \right]$$

o pure ripetendo n da $n=1$ ad $n=\infty$, e sostituendo per la funzione gamma il valore che rappresenta,

$$\psi(m,i) = 2.\,\frac{m(m+1)\ldots(m+i-1)}{1.\,2\,\ldots\ldots\,i}\,\alpha^i \left[1 + \frac{m}{1} . \frac{m+i}{i+1}\,\alpha^2 + \frac{m(m+1)}{1.\,2} . \frac{(m+i)(m+i+1)}{(i+1)(i+2)}\,\alpha^4 + \ldots \right]$$

Se in questo valore di $\psi(m,i)$ che a causa della picciolezza di α risulta sempre convergente, e che è lo stesso di quello che hanno i geometri con metodo diverso ottenuto, si pone $m=\frac{1}{2}$, si ricava il valore di

$$(7) \ldots \psi\left(\frac{1}{2},i\right) = 2.\,\frac{1.3.5.\ldots(2i-1)}{2.4.6.\ldots.\,2i}\,\alpha^i \left[1 + \frac{1}{2} . \frac{2i+1}{2i+2} . \alpha^2 + \frac{1.3}{2.4} . \frac{(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)}\,\alpha^4 + \ldots \right]$$

il quale, come rilevasi, è quello stesso di cui servissi il signor Laplace per determinare la costante. Il valore di $\psi(m,i)$ scritto sotto la forma (6) ha pure il vantaggio di produrre immediatamente il valore di $\psi(m,o)$: difatti postovi $i=o$ si trova

$$\psi(m,o) = 2.\left[1 + \mathop{S}_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\,\Gamma(n+1)} \right)^2 \alpha^{2n} \right]$$

o pure come altronde è conosciuto

$$(8)\ldots\ \psi(m,o)=2\left[1+\left(\frac{m}{1}\right)^2\alpha^2+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\alpha^4+\ldots\right]$$

Per venire all' applicazione delle serie che ci troviamo or ora assegnate richiamiamo dalla *Meccanica Celeste* (tom. 1° pag. 269) che tra i coefficienti de' termini risultanti dallo sviluppo della potenza $-m$ di

$$1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2$$

ha luogo la relazione

$$(9)\ldots\ \psi(m,i)=\frac{(i-1)(1+\alpha^2)\,\psi(m,i-1)-(i+m-2)\,\alpha\,\psi(m,i-2)}{(i-m)\,\alpha}$$

come anche quest'altra

$$(10)\ldots\psi(m+1,i)=\frac{(m-i)(1+\alpha^2)\,\psi(m,i)+2(i+m-1)\,\alpha\,\psi(m,i-1)}{m(1-\alpha^2)^2}$$

tra quelli dei termini della potenza $-m$, e $-(m+1)$. Ció importa che conoscendo i valori dei coefficienti $\psi(m,0)$, $\psi(m,1)$ si conosceranno per mezzo di quelle formole, e per essere in generale

$$\psi(m,i)=\psi(m,-i)$$

i valori di tutti gli altri. Nella teoria dei pianeti essendo $m=\frac{1}{2}$ ne deriva che bisogna solamente conoscere i valori di $\psi(\frac{1}{2},0)$, $\psi(\frac{1}{2},1)$, i quali ci sono dati dalla somma delle due serie

$$\psi(\tfrac{1}{2},0)=2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha^2+\left(\frac{1.2}{3.4}\right)^2\alpha^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\alpha^6+\ldots\right]$$

$$\psi(\tfrac{1}{2},1)=\alpha\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\alpha^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3.5}{4.6}\alpha^4+\ldots\right].$$

Queste serie che si deducono l' una dalla (8) e l'al-

tra dalla (7) non risultano tanto convergenti che quando α è una piccola frazione. S'è perciò che i geometri fanno uso di quest' altre

$$\psi(-\tfrac{1}{2}, 0) = 2\left[1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\alpha^2 + \left(\tfrac{1.1}{2.4}\right)^2\alpha^4 + \left(\tfrac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2\alpha^6 + \dots\right]$$

$$\psi(-\tfrac{1}{2}, 1) = -\alpha\left[1 - \tfrac{1.1}{2.4}\alpha^2 - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1.1.3}{2.4.6}\alpha^4 - \tfrac{1.3}{4.6}\cdot\tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\alpha^6 + \dots\right]$$

che convergono più rapidamente, e che si ottengono con fare $m = -\frac{1}{2}$ nei valori di $\psi(m, 0)$, $\psi(m, 1)$. Assegnati prima i valori de' coefficienti $\psi(-\frac{1}{2}, 0)$, $\psi(-\frac{1}{2}, 1)$ per mezzo della somma dei primi undici o dodici termini di quest' ultime serie, lo che basta nella teoria de' pianeti, e dei satelliti, si ottengono poscia i valori de' coefficienti $\psi(\frac{1}{2}, 0)$, $\psi(\frac{1}{2}, 1)$, da cui tutti gli altri dipendono, mercè le note relazioni

$$(11)\dots\ \psi(\tfrac{1}{2}, 0) = \frac{(1+\alpha^2)\,\psi(-\frac{1}{2}, 0) + 6\alpha\,\psi(-\frac{1}{2}, 1)}{(1-\alpha^2)^2}$$

$$(12)\dots\ \psi(\tfrac{1}{2}, 1) = \frac{2\alpha\,\psi(-\frac{1}{2}, 0) + 3(1+\alpha^2)\,\psi(-\frac{1}{2}, 1)}{(1-\alpha^2)^2}$$

le quali si deducono dalla (10) allorchè si pone $m = -\frac{1}{2}$, e poi successivamente $i = 0$ ed $i = 1$. Considerando che un tale calcolo risulta molto lungo e penoso abbiamo tentato trasformare le due serie che ci danno i valori di $\psi(\frac{1}{2}, 0)$, $\psi(\frac{1}{2}, 1)$ in due altre che fossero molto più convergenti. Ci troviamo avere ciò conseguito rimpiazzando la prima serie per mezzo di un' altra ordinata secondo le potenze del logaritmo iperbolico di

$$1 - \alpha^2$$

e trasformando la seconda in quest' altra

$$(13)\ldots\ \psi(\tfrac{1}{2},1)=\alpha\,[\psi(\tfrac{1}{2},0)-y-1)$$

in cui y rappresenta una quantità ausiliaria, che viene determinata dalla

$$y=(\tfrac{1}{2})^2\cdot\frac{\alpha^2}{2}+(\tfrac{1.2}{3.4})^2\cdot\frac{\alpha^4}{3}+(\tfrac{1.3.5}{2.4.6})^2\cdot\frac{\alpha^6}{4}+\cdots$$

Questa serie che ho pure trasformato in un' altra ordinata secondo le potenze ascendenti del logaritmo neperiano della stessa quantitá, può esprimersi in funzione del coefficiente $\psi(\frac{1}{2},0)$ mercè un' espressione che merita essere notata. Difatti moltiplicando per $p\alpha^q$ il valore di y, differenziando rapporto ad α il prodotto che ne risulta, e determinando le quantitá p,q sotto la condizione di far sparire in tutti i termini i divisori delle potenze della α, troverassi la equazione differenziale di primo ordine a coefficienti variabili

$$dy+\frac{2}{\alpha}y\,d\alpha=[\psi(\tfrac{1}{2},0)-2]\cdot\frac{d\alpha}{\alpha}$$

che integrata ci dá

$$y=\frac{1}{\alpha^2}\int[\psi(\tfrac{1}{2},0)-2].\alpha d\alpha+C.$$

Attenendoci al metodo d' integrare per parti nello effettuare l' integrazione del secondo membro di quest' ultima equazione, e per semplicità del calcolo esprimendo con ψ la funzione $\psi(\frac{1}{2},0)$, otterrassi il risultato

$$1+y=\tfrac{1}{2}\psi-\frac{\alpha}{2.3}\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)+\frac{\alpha^2}{2.3.4}\left(\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\right)-\cdots$$

ch' è molto notabile, e ch' è scritto senza costante

arbitraria perchè ad $\alpha = 0$ corrispondendo $y = 0$, e $\psi = 2$ si trova $C = 0$. Il valore di y ricavato da questa equazione e sostituito in quello di $\psi(\frac{1}{2}, 1)$ ci somministra quest' altro risultato

$$\psi(\tfrac{1}{2}, 1) = \alpha\psi - \alpha\left[\tfrac{1}{2}\psi - \frac{\alpha}{2.3}\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right) + \frac{\alpha^2}{2.3.4}\left(\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\right)\cdots\right]$$

che non è meno notabile.

Per avere intanto le serie che ci danno i valori dei coefficienti $\psi(\frac{1}{2}, 0)$, $\psi(\frac{1}{2}, 1)$ poniamo

$$\alpha^2 = 1 - z$$

e ci proponiamo trasformare la serie generale

$$1 + M^{(1)}\alpha^2 + M^{(2)}\alpha^4 + M^{(3)}\alpha^6 + M^{(4)}\alpha^8 + \cdots$$

di cui le proposte sono un caso particolare, in una altra ordinata secondo le potenze del logaritmo iperbolico di z. A tale effetto facciamo

$$1 + M^{(1)}\alpha^2 + M^{(2)}\alpha^4 + M^{(3)}\alpha^6 + M^{(4)}\alpha^8 + \cdots =$$

$$1 + A^{(1)}lz + A^{(2)}l^2z + A^{(3)}l^3z + A^{(4)}l^4z + \cdots$$

e per conseguire i valori delle A che funzionano da quantità indeterminate indipendenti da z vi mettiamo per α^2, α^4, ecc. i loro valori, che in generale ci sono dati dall' espressione

$$\alpha^{2n} = (1 - z)^n.$$

Ciò fatto troviamo, dopo essere state effettuate le riduzioni, il risultato

$$V^{(0)} - V^{(1)}z + V^{(2)}z^2 - V^{(3)}z^{(3)} + V^{(4)}z^4 - \ldots =$$

$$A^{(1)}lz + A^{(2)}l^2z + A^{(3)}l^3z + A^{(4)}l^4z + \cdots$$

nel quale i valori delle $V^{(n)}$, che sono state adoperate per semplicità del calcolo, si deducono dall'equazioni

$$V^{(0)}=M^{(1)}+M^{(2)}+M^{(3)}+M^{(4)}+M^{(5)}+\cdots$$
$$V^{(1)}=M^{(1)}+2M^{(2)}+3M^{(3)}+4M^{(4)}+5M^{(5)}+\cdots$$
$$V^{(2)}=M^{(2)}+3M^{(3)}+6M^{(4)}+10M^{(5)}+15M^{(6)}+\cdots$$
$$V^{(3)}=M^{(3)}+4M^{(4)}+10M^{(5)}+20M^{(6)}+35M^{(7)}+\cdots$$
$$V^{(4)}=M^{(4)}+5M^{(5)}+15M^{(6)}+35M^{(7)}+70M^{(8)}+\cdots$$

ec, ec.

equazioni che, formando i coefficienti delle M le serie dei numeri figurati, sono molto facili ad essere costruite. Onde conseguire però la determinazione delle A mettiamo nell' espressione precedente in vece di z il suo valore

$$z=1+lz+\frac{1}{2}l^2z+\frac{1}{2.3}l^3z+\cdots$$

espresso dipendentemente dal suo logaritmo neperiano; ed eguagliando tra loro i termini moltiplicati per la medesima potenza del cennato logaritmo di z, troveremo

$$A^{(1)}=-[V^{(1)}-2V^{(2)}+3V^{(3)}-4V^{(4)}+5V^{(5)}-\cdots]$$

e in generale

$$A^{(n)}=-\frac{1}{1.2.3\ldots n}(V^{(1)}-2^nV^{(2)}+3^nV^{(3)}-4^nV^{(4)}+\cdots)$$

Sostituendo in queste formole i valori delle V, ed ordinando rapporto alle M, troverassi

$$A^{(1)} = -M^{(1)}$$

$$A^{(2)} = -\frac{1}{1.2}[M^{(1)} + (2-2^2)M^{(2)}]$$

$$A^{(3)} = -\frac{1}{1.2.3}[M^{(1)} + (2-2^3)M^{(2)} + (3-3.2^3)M^{(3)}]$$

e quindi in generale l'espressione

$$A^{(n)} = \frac{-1}{1.2.3\ldots n}\Big[M^{(1)} + (2-2^n)M^{(2)} + (3-3.2^n+3^n)M^{(3)} + \ldots$$

$$+\left(\omega - \frac{\omega(\omega-1)}{2}.2^n + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2.3}.3^n - \ldots\right)M^{(\omega)}$$

$$+ \ldots\ldots\Big]$$

che può scriversi sotto la forma simbolica

$$A^{(n)} = \frac{-1}{\Gamma(n+1)} \underset{\omega=1}{\overset{\omega=n}{S}} \; \underset{v=1}{\overset{v=\omega}{S}} \; \frac{\pm\Gamma(\omega+1)v^n\, M^{(\omega)}}{\Gamma(\omega-v+1).\,\Gamma(v+1)}$$

in cui il segno superiore appartiene a v impari, e l'inferiore a v pari. Applicando gli ottenuti risultati all'espressioni formanti i valori dei coefficienti $\psi(\frac{1}{2}, 0)$, $\psi(\frac{1}{2}, 1)$ e facendo $lz = \lambda$, otterransi le serie

$$(14)\ldots \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2}, 0) = 1 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1.\,1}{4.\,16}\lambda^2 + \frac{1.\,1.\,3}{4.16.36}\lambda^3$$

$$- \frac{1.\,1.\,3.\,5}{4.16.36.64}\lambda^4 - \frac{1.\,1.\,3.\,5.\,23}{4.16.36.64.100}\lambda^5$$

$$+ \frac{1.\,1.\,3.\,3.\,5.\,53}{4.16.36.64.100.144}\lambda^6 + \frac{1.\,1.\,3.\,3.\,5.\,7.\,593}{4.16.36\;64.100.144.196}\lambda^7$$

$$- \frac{1.\,1.\,3.\,3,\,5.\,5.\,7.\,1033}{4.16.36.64.100.144.196.256}\lambda^8 - \ldots\ldots$$

$$(15)\ldots y=-\frac{1}{4.2}\lambda-\frac{1.3}{4.16.3}\lambda^2+\frac{1.3.5}{4.16.36.4}\lambda^3+\frac{1.3.5.23}{4.16.36.64.5}\lambda^4$$
$$-\frac{1.3.3.5.53}{4.16.36.64.100.6}\lambda^5-\frac{1.3.3.5.7.593}{4.16.36.64.100.144.7}\lambda^6$$
$$+\frac{1.3.3.5.5.7.1033}{4.16.36.64.100.144.196.8}\lambda^7+\ldots$$

le quali nel mentre che risultano più convergenti di tutte quelle che si trovano sopra rapportate hanno anche il vantaggio che i coefficienti dell' una sono legati a quella dell' altra mercé un rapporto ch' è semplicissimo. Se indichiamo con $P^{(n+1)}$ il coefficiente che moltiplica la potenza $n+1$ di λ nella prima serie, e con $Q^{(n)}$ quello che moltiplica nella seconda la potenza ennesima della stessa quantità, troveremo l' espressione

$$Q^{(n)}=-4\,(n+1)\,P^{(n+1)}$$

per l' accennata relazione. Un' altro rapporto, ch' è pure marcato, si può assegnare tra i coefficienti $\psi\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\psi\left(\frac{1}{2},1\right)$ mercè la formola che veniamo di trovare. Difatti moltiplicandola prima per λ^n, e facendovi poi successivamente $n=1=2=3=$ ec. si ottengono l' equazioni

$$Q^{(1)}\lambda=-4.2\,P^{(2)}\lambda$$
$$Q^{(2)}\lambda^2=-4.3\,P^{(3)}\lambda^2$$
$$Q^{(3)}\lambda^3=-4.4\,P^{(4)}\lambda^3$$
$$Q^{(4)}\lambda^4=-4.5\,P^{(5)}\lambda^4$$

ec. ec.

le quali addizionate ci danno

$$Q^{(1)}\lambda + Q^{(2)}\lambda^2 + Q^{(3)}\lambda^3 + Q^{(4)}\lambda^4 + \ldots\ldots = -$$

$$4\,(2\,P^{(2)}\lambda + 3\,P^{(3)}\lambda^2 + 4\,P^{(4)}\lambda^3 + \ldots\ldots)$$

o, ciò che torna la stessa cosa,

$$y = -2\left(\frac{d\psi}{d\lambda}\right) - 1\,.$$

Se in questa espressione in vece di λ si mette il suo valore

$$\lambda = lz = l(1-\alpha^2)$$

si ricava

$$y = -\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right) - 1$$

e quindi dalla (13) la relazione

$$\psi\left(\tfrac{n}{2},\,1\right) = \alpha\left[\psi + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)\right],$$

la quale, cangiando $\psi(\frac{1}{2},\,0)$ in P_0, $\psi(\frac{n}{2},\,1)$ in P_1, ed α in a, si deduce come caso particolare dalla formola

$$\left(\frac{dP_0}{da}\right) = \frac{2n}{1-\alpha^2}\left(P_1 + a\,P_0 - \frac{1}{n}P_1\right)$$

assegnata dal sig. Legendre nel secondo volume dei suoi *Esercizj di Calcolo Integrale*.

Frattanto per dare un' applicazione delle serie che abbiamo precedentemente assegnato ci proponiamo trovare il valore di $\psi(\frac{1}{2},\,0)$ nel caso il più sfavorevole ch' è quello in cui α rappresenta il rapporto della distanza media di Venere alla distanza media della Terra. Per questo caso essendo (*Mec. Cel. tom. 3. pag. 71.*)

$$\alpha = 0,72333230$$

sarà

$$\lambda = lz = l(1 - \alpha^2) = -0,7406783 5,$$

e quindi, dopo essere state effettuate le sostituzioni e le operazioni,

$$\psi(\tfrac{1}{2}, 0) = 2,386374.$$

Questo risultato che è stato conchiuso con valutare soltanto i primi sette termini della serie (14) sino ad otto decimali non differisce da quello della *Meccanica Celeste*, rappresentato (Tom. cit. pag. 72) da

$$\psi(\tfrac{1}{2}, 0) = 2,386343,$$

che di 0, 000031; differenza trascurabile, e che quasi s' annulla se si considera ch' essendo in questo caso (*Mec. Cel. tom. 3. pag. 71*).

$$\psi(-\tfrac{1}{2}, 0) = 2.27159164$$

$$\psi(-\tfrac{1}{2}, 1) = -0,67226321 5 1$$

si conchiude dalla (11)

$$\psi(\tfrac{1}{2}, 0) = 2,386371.$$

Le serie rappresentanti i valori di $\psi(\tfrac{1}{2}, 0)$, $\psi(\tfrac{1}{2}, 1)$, da noi prodotte sotto la forma (14), e (15) risultano di grande utilità nella valutazione delle trascendenti che sono rappresentate in generale dalla

$$\int_0^1 \frac{x^{2i}\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \alpha^2 x^2)}}.$$

Difatti se nella (2) invece di x si mette x^2 si trova

$$\int_0^1 \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2x^2)}} = \frac{\pi\psi(\frac{1}{2},i)}{4\alpha^i}.$$

Questo risultato dipende, com' è facile rilevare, dal calcolo delle

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2x^2)}} = \frac{\pi\psi(\frac{1}{2},0)}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2x^2)}} = \frac{\pi\psi(\frac{1}{2},1)}{4\alpha}$$

che si possono valutare per mezzo delle (14), (15), e di cui la seconda moltiplicata per α^2 e sottratta dalla prima ci somministra

$$\int_0^1 \frac{dx\sqrt{(1-\alpha^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{4}\left[\psi(\tfrac{1}{2},0)-\alpha\psi(\tfrac{1}{2},1)\right].$$

Altre espressioni più complicate si possono ancora valutare mercè le precedenti. Per farlo vedere facciamo nella

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos u+\alpha^2)}} = \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2},0)+\psi(\tfrac{1}{2},1)\cos u+\psi(\tfrac{1}{2},2)\cos 2u+\cdots$$

in cui i coefficienti $\psi(\frac{1}{2},i)$ hanno luogo qualunque siasi il valore di u, $u=0$ ed $u=\pi$. Ciò fatto, otterremo le due serie

$$\frac{1}{1-\alpha} = \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2},0)+\psi(\tfrac{1}{2},1)+\cdots\psi(\tfrac{1}{2},i)+\cdots$$

$$\frac{1}{1+\alpha} = \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2},0)-\psi(\tfrac{1}{2},1)+\cdots\pm\psi(\tfrac{1}{2},i)\mp\cdots$$

che prima sommate e poi sottratte ci danno

$$\frac{2}{1-\alpha^2}=\psi(\tfrac{1}{2},0)+2\psi(\tfrac{1}{2},2)+2\psi(\tfrac{1}{2},4)+\cdots$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha^2}=\psi(\tfrac{1}{2},1)+\psi(\tfrac{1}{2},3)+\psi(\tfrac{1}{2},5)+\cdots$$

Sostituendo in queste espressioni i valori de' coefficienti $\psi(\frac{1}{2},0), \psi(\frac{1}{2},1)$, ec. ec. che in generale ci sono dati dalla

$$\psi(\tfrac{1}{2},i)=\frac{4\alpha^i}{\pi}\int_0^1 \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2x^2)}}$$

e considerando che i valori di i si estendono da $i=0$ ad $i=\infty$ si ottengono i risultati

$$\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{(1-\alpha^2x^4)\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2x^2)}}=\frac{\pi}{4\alpha^2(1-\alpha^2)}-\frac{\pi\psi(\frac{1}{2},0)}{8\alpha^2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1-\alpha^2x^4)\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2x^2)}}=\frac{\pi}{4(1-\alpha^2)}$$

dei quali il secondo molto notabile ci fa rilevare l'integrale definito di quest' ultima trascendente potersi, quantunque molto composta, ottenersi per archi di cerchio sotto espressione finita e semplicissima.

N.B. Era già impresso il primo foglio della presente memoria quando mi venne annunziato che la correzione alla formola del sig. Laplace, da me notata alla pag. 12, era stata pure marcata dal sig. Plana. Fu dopo tale notizia che io ebbi la premura farne menzione nella pagina citata, sebene non mi fosse stato indicato in quale parte delle sue opere, e in quale occasione questo egregio geometra l'abbia notato.